5.2 伯努力分配(Bernoulli Distribution) 與 二項分配(Binomial Distribution)

一、 伯努力分配(Bernoulli Distribution)

符號: r.v. $X \sim Ber(p)$

隨機實驗:

實驗中之出象只有兩種，研究者有興趣的視為「成功」以 $x=1$ 表示，另一種視為「失敗」以 $x=0$ 表示，而成功機率以 p 表示，即 $p=P(X=1)$ 。

例：令 r.v. X 表某考生通過全民英檢，$p=0.72$ 表該考生可通過之機率，

$X \sim Ber(p=0.72)$ 。

令 r.v. X 表某考生通過全民英檢，$p=0.72$ 表該考生未通過之機率，

$X \sim Ber(p=0.28)$ 。

圖形:

機率質量函數:

$X \sim Ber(p)$

$f_X(x)=p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1$, $0<p<1$

X=x	0	1
$f_X(x)=P(X=x)$	1-p	p

期望值: $E(X)=p$

變異數: $V(X)=p(1-p)$

證明: $E(X)=\sum_{x=0}^{1} x p^x(1-p)^{1-x}=p$

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{1} x^2 p^x(1-p)^{1-x}=p$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p(1-p)$$

<註> Ber(p)原動差之特性: $E(X^r)=p$, r=1,2,…, 反之亦然

m.g.f.： $M_X(t)=(1-p)+pe^t$ ， $t\in R$

證明： $E(e^{Xt})=\sum_{x=0}^{1}e^{xt}p^x(1-p)^{1-x}$

$$=\sum_{x=0}^{1}(pe^t)^x(1-p)^{1-x}=(1-p)+pe^t$$

二、二項分配(Binomial Distribution)

符號: r.v. $X \sim Bin(n,p)$

隨機實驗:

進行n次相互獨立且成功機率 p 相同之伯努力實驗後，令r.v.X表獲得「成功」之總次數。 <註> 實驗規則屬於抽後放回

例：令 r.v.X 表 100 位考生中通過全民英檢之總人數，$p=0.72$ 表每一位考生可通過之機率，$X\sim Bin(n=100,p=0.72)$。

圖形:

機率質量函數:

$$X\sim Bin(n,p)$$

$$f_X(x)=P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \quad , \quad x=0,1,2,\cdots,n \quad , \quad 0<p<1$$

伯努力分配與二項分配之關係:

設 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n \overset{iid}{\sim} Ber(p)$

其中 iid=independent identically distribution

令 $X=\sum_{i=1}^{n}Y_i=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$

$$X\sim Bin(n,p)$$