

# 第十章 單一母體的推論統計

## ※ 學習重點

1. 對母體平均數作區間估計時， $Z$  分配與  $T$  分配之使用時機。
2. 假設考驗時，考驗型態(單雙尾)與查表臨界值之使用。
3. 母體相關係數之區間估計—利用 Fisher  $Z$ -Transformation 之後，再轉換回相關係數。
4. 相關係數的臨界值檢定法。
5. 型 II 錯誤  $\beta$  機率之計算。
6. 檢定考驗力之計算。

## 一. 概論

描述母體特性的數值為母數(或參數)，本章討論有關一個母數的推論統計，包括母體平均數、母體變異數、母體比例與母體相關係數。

## 二. 區間估計 (Interval Estimation)

### 1. 意義:

乃根據樣本資料的點估計值，藉由其抽樣分配的性質求出兩數值，構成一區間，再利用該區間推估未知的母體參數範圍的統計方法。

### 2. 母體平均數的區間估計：因為 $\bar{X}$ 的抽樣分配有兩種，可選擇的估計方式有二：

#### (1) $Z$ 分配

##### a. 使用時機

- (a) 常態母體，大樣本( $n \geq 30$ )
- (b) 常態母體，小樣本， $\sigma$  已知
- (c) 非常態母體，大樣本(乃基於中央極限定理)

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

#### (2) $t$ 分配

##### a. 使用時機

常態母體，小樣本， $\sigma$  未知，以  $S$  取代  $\sigma$

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

版權所有，重製必究

### 3. 母體變異數的區間估計

$$\left( \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right)$$

### 4. 母體比例的區間估計

$$\hat{P} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{P(1-P)/n}$$

### 5. 母體相關係數的區間估計

$$Z_r \pm Z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n-3}} \rightarrow \text{此乃利用費雪 } Z \text{ 轉換 (Fisher's } Z\text{-transformation), 使用附表六。}$$

再轉換回  $r_{xy}$

### 6. 結論

- (1) 母體參數落在某一區間的機率大，我們稱其信賴水準高；而信賴區間大小與信賴水準高低，皆會影響區間估計的準確度。
- (2) 當樣本量  $n$  增大， $\sigma^2/n$  會變小，導致估計值會較接近母體參數，且估計的區間較短。
- (3) 在求 95% 的信賴區間時，我們更稱 95% 為信賴水準，信賴度，或信賴係數。
- (4) 在信賴區間長度相同下，信賴水準越大，估計結果越準確；  
在信賴水準相同時，信賴區間長度越短，估計結果越準確。

## 三. 假設考驗

### 1. $\mu$ 的假設考驗

#### (1) Z 檢定

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

#### (2) t 檢定

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

版權所有，重製必究

2.  $\sigma^2$  的假設考驗

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

3. P 的假設考驗

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

4.  $\rho$  的假設考驗

(1) 臨界值法

$r_{統} > r_{臨界值}$ ，考驗達顯著。

(2) t 檢定法

$$t = \frac{r - \rho}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

(3) Z 檢定法

當所要檢定的相關係數明顯大於 0 (實際上，只要不為 0)，一樣使用費雪 Z 轉換如下：

$$Z = \frac{Z_r - Z_\rho}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}}$$

#### 四. 觀念練習題

1. 要考驗實驗組的平均數是否高於控制組的平均數，則虛無假設應寫成 \_\_\_\_\_，對立假設應寫成 \_\_\_\_\_。

2. 周生想研究「女老師的任教意願是否比較高」的問題，試就此研究回答以下問題：

(1) 此問題的虛無假設是 \_\_\_\_\_ 版權所有，重製必究

- (2) 在此研究中，第一類型錯誤是指\_\_\_\_\_；
- (3) 在此研究中，第二類型錯誤是指\_\_\_\_\_。
3. 某研究者提出的假設是：「男生與女生的平均智商不相同」，虛無假設應寫為\_\_\_\_\_，對立假設應寫為\_\_\_\_\_。
4. 某教師利用 *WAIS* 量表測量 100 位該校高三學生，得平均智商 117，試估計該校所有高三學生的智商平均為何? ( $\alpha=0.05$ )
5. 自某一班級中隨機抽出 4 名學生的統計學成績為 64，66，89，77，求全班平均成績之 95%信賴區間並說明之。
6. 自全校抽取 100 名學生，其中患近視眼者 60 名，而該校聲稱近視之概率為 0.5，試估計該校近視學生百分比的 95%信賴區間。
7. 某一鐘錶製造商欲了解其產品品質之差異性，今自一批手錶中隨機抽出 10 隻，已知其  $\bar{X} = 0.7, s = 0.4$ ，則其所生產手錶時間變異之 95%信賴區間為何？又，試在 0.05 顯著水準下，檢定該批手錶時間變異大於 0.05 之假設。
8. 政大某位教授以同一教學模式教學多年，他所教過的所有學生成績平均數與標準差 82 與 12，今年該教授改採電腦輔助教學，並相信會比過去班級之學習成就高，今年班級有 36 位學生，平均成績為 87，試回答下列問題：
- (1) 寫出方向性研究假設
  - (2) 以符號方式表示虛無與對立假設
  - (3)  $\alpha=0.05$ ，試問該教授的看法是否得到支持？

9. 某研究者想了解父母親智力與子女智力之相關，他抽取 10 對家庭為研究樣本，結果得  $r=.62$ ，試問在  $\alpha=.05$  下，該研究者能不能下結論說二者之相關不是零相關？

10. 已知受試者 8 名，在  $X$ 、 $Y$  兩變項之反應結果如下：

$$\sum X = 56, \quad \sum (X - \bar{X})^2 = 132,$$

$$\sum Y = 40, \quad \sum (Y - \bar{Y})^2 = 56, \quad \sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 84,$$

則(1)  $X$  與  $Y$  之變異數分別為何？

(2)  $X$  和  $Y$  之共變數為何？

(3)  $X$  和  $Y$  之相關是？

(4) 若  $r$  的顯著性臨界值為 .707，則本題所求得的相關應解釋為何？

11. 大學生魏式成人智力測驗的平均數為 100，標準差為 15，如果由大學生中隨機抽出人數為 25 的樣本，則有 95% 的機率，這個平均數會介於多少之間？又任一大學生的個人分數小於 85 分的機率為何？

12. 設最新統計資料顯示新生男嬰的體重平均數為 3200 克，標準差為 900 克，而某城鎮懷疑其空氣受到化學污染，隨機抽取 100 位男嬰得到平均體重為 3000 克，該城鎮男嬰體重是否低於常模？探討這個問題宜採下列哪一項考驗？

(1) 單側  $Z$  考驗 (2) 雙側  $Z$  考驗 (3) 單側  $t$  考驗 (4) 雙側  $t$  考驗。

13. 承上題，男嬰體重平均數抽樣分配的標準誤為何？

(1) 900 克 (2) 90 克 (3) 9 克 (4) 資料不全，無法判斷。

14. 當母群為常態分配而其變異數未知時，下列何者不會影響信賴區間的大小？

(1) 平均數 (2) 標準差 (3) 樣本人數 (4) 顯著水準。

版權所有，重製必究

15. 用  $\alpha=0.05$  的顯著水準，以 t-test 考驗假設  $H_0: \mu \leq 75$  ;  $H_1: \mu > 75$ ，其拒絕區的位置何在？  
(1) t 分配的兩邊 (2) t 分配的中間 (3) t 分配的左邊 (4) t 分配的右邊。
16. 同樣為百分之九十五的信賴區間估計結果，以下哪個區間展現統計上的顯著效果且估計較為精準？  
(1) **【3.7, 5.8】** (2) **【-0.3, 2.9】** (3) **【-7.5, -2.0】** (4) **【-1.6, 5.3】**
17. 解釋名詞  
(1) 標準誤  
(2) t 考驗
18. 隨機選取某地區 144 位高中學生，經工具測得其智商之平均值是 130，標準差是 36；經由此資料，以 99% 之機率確定該地區之高中學生之平均智商的範圍為何？並寫出計算過程。
19. 以下資料為五個新生兒體重的隨機樣本，每個樣本的樣本數為 10，平均數及標準差分別如下：  
 $\bar{x}_1=116.90$   $\bar{x}_2=136.80$   $\bar{x}_3=117.00$   $\bar{x}_4=106.70$   $\bar{x}_5=111.90$   
 $s_1=21.70$   $s_2=32.62$   $s_3=22.44$   $s_4=14.13$   $s_5=20.46$   
(1) 請計算第一樣本體重的 95% 信賴水準區間 ( $z=2.24$ )  
(2) 請問哪一個樣本的區間長度最長？這表示這個估計較準或較不準？
20. 適當的單側考驗(one-tailed test)，與雙側考驗(two-tailed test)比較(以 t 考驗為例)，下列敘述何者正確？  
(A) 抽樣分配的標準誤較小 (B) 樣本計算出的 t 值較大  
(C) 犯第二類型錯誤的概率較低 (D) 自由度較少。
21. 一隨機樣本含有 25 組(x, y)值，假設變數 X 和 Y 的樣本相關係數為 0.6，檢定  $H_0: \rho = 0$  對  $H_1: \rho \neq 0$  的檢定統計量之值約為多少？  
(A) 4.80 (B) 3.75 (C) 3.67 (D) 3.60

版權所有，重製必究

22. 若已知一母群的平均數為 50，變異數為 100，若從此母群中抽取樣本 20 人的樣本許多個，請問樣本平均數次數分配的變異數為多少？  
 (A) 2 (B) 5 (C) 10 (D) 100。

## 五. 模擬試題

1. 已知某班學生在教育統計學課程的兩次考試成績的報表資料如下：

variable	number of cases	mean	standard deviation	standard error
第一次考試	10	73	9.189	2.906
第二次考試	10	83	5.869	1.856

t 考驗結果如下：

(difference) mean	standard deviation	standard error	2 tail corr. prob.	t value	degrees of Freedom	2 tail prob.
10	10.274	3.249	.124	.734		0.013

- (1) 這兩次考試成績之間，是否達顯著差異？
  - (2) 這兩次考試成績，何者較優？
  - (3) 該班參加考試的人數是多少人？
  - (4) 該兩次考試成績差距的抽樣標準誤是多少？
  - (5) 該兩次考試成績間的相關係數是多少？
2. 某一蕃茄醬生產商在瓶裝標籤上說內容物淨重為 16 盎司，由於政府機構檢查全國販售的所有包裝是不可能的，因此隨機抽查 25 瓶該產品，其平均數為 15.9，已知所有瓶重的標準差為 0.4 盎司，問是否有充分證據足以推論所有瓶裝的平均重量少於 16 盎司? ( $\alpha=0.05$ )
3. 高點師院學治會在支持或反對學校某項議題前，想知道學生對該項議題的態度再決定投贊成或反對票。當支持率超過.50 以上，才投贊成票。學治會隨機抽取 100 位學生，發現 60 位贊成，40 位反對。試問在  $\alpha=.05$  下，學治會是否該支持該項議題？

4. 請根據下列資料

$\mu=100$ ， $\sigma=15$ ， $\bar{X}=105$ ， $N=2500$ ， $\alpha=.05$ (雙側考驗)

說明區間估計的步驟。(20分)

(94三等特考)

5. 某國中輔導室主任向校長與教務主任報告該校新生智力測驗實施的結果，其中一段報告文字：「...有256位新生接受智力測驗，該智力測驗母群體平均數( $\mu$ )是100分，母群體標準差( $\sigma$ )是16分。本年度新生在該智力測驗上得分之平均數為101分，95%信賴區間介於99.04分與102.96分之間...」(25分)

(一) 請說明「95 %信賴區間介於99.04分與102.96分之間」是如何算出來的？

(二) 信賴區間的計算至少會涉及到下列兩個概念：抽樣分配與樣本平均數的標準誤，請解釋此二概念。

(三) 請解釋「95 %信賴區間介於99.04分與102.96分之間」的意思。(94普考)

6. 假定丁老師要用 5 個人的樣本資料來考驗  $H_0: \mu = 25$ (母群平均數為 25)，對立假設可能是  $\mu < 25$  或  $\mu > 25$ ，而顯著水準是 .05。隨機樣本的資料如下：21, 17, 25, 18 及 19。根據這些資料，回答以下的問題。

(一) 用來進行  $t$  檢定的樣本平均數分配之估計標準誤是多少？(5 分)

(二) 在這個檢定中，自由度為何？(5 分)

(三) 從這個特殊的樣本所觀察到的  $t$  值為何？(5 分)

(四) 如果拒絕區的臨界值為  $t_{.025(df)} = 2.776$  或是  $t_{.975(df)} = -2.776$ ，這個假設考驗的結果為何？其對應的意涵為何？(10 分)

(96 三等特考)



7. 假設林老師欲以 100 個受試樣本考驗其任教學校學生之智力測驗成績是否異於常模之平均數 100。已知該智力測驗分數之標準差為 15，假定  $\alpha$  訂為 .05，則
- (一) 林老師欲回答該問題需用何種考驗方法？(5 分)
  - (二) 若林老師的研究問題改為是否該校學生之智力成績優於一般常模，則在其他上述條件不變下，對統計的考驗力將有何影響？(5 分)
  - (三) 若林老師將受試樣本人數降低至 60 人，則在其他條件不變下，對統計的考驗力有何影響？(5 分)
  - (四) 若林老師將  $\alpha$  改訂為 .01，則在其他條件不變下，對統計的考驗力有何影響？(5 分)
  - (五) 在其他條件不變之下，若不想犧牲第一類型錯誤，但又希望統計考驗力能增加，則林老師須採何措施？(5 分)
- (97 原住民四等特考)

8. 已知一變數  $X$  成偏態分配，其平均數為 20，標準差為 5。(附常態分配表)
- (一) 從此分配抽取 8 個分數並計算其平均數，若重複此步驟無限多次，則這些樣本平均數所形成的分配之平均數為何？(5 分)
  - (二) 從此分配只抽取 5 個分數並計算其平均數，再重複此步驟無限多次之後，這些樣本平均數所形成的分配之變異誤為何？(5 分)
  - (三) 若從同一個分配抽取 100 個分數並計算其平均數，重複此步驟無限多次之後，可以得到一個由樣本平均數所形成的分配。在這個分配中，樣本平均數小於 20.98 的概率為何？(10 分)
- (101 普考)

9. 如何判斷平均數的抽樣分配為 Z 分配或 t 分配？(15 分)

(102四等身心障礙特考)

10. 如何判斷統計考驗要用單側或雙側考驗？(10 分)

(102四等身心障礙特考)

11. 教育部為瞭解高中生吸菸的比率 (P)，乃從母群體中隨機抽取樣本 100 人，其中有 20 人吸菸，試求：

(一) 抽樣分配的型態為何種分配？(5 分)

(二) 抽樣分配的標準誤為何？(10 分)

(三) P 值在 95% 信賴水準的範圍？(10 分)

(102四等身心障礙特考)

#### ※ 問題思考

1. 以平均數為例，能否說明區間估計之重要步驟並導出公式？
2. 母體變異數必須利用  $\chi^2$  分配，你是否了解  $\chi^2_{\alpha/2}$  與  $\chi^2_{1-\alpha/2}$  的值何者較大？
3. 以 Fisher Z-Transformation 進行區間估計時，標準誤之自由度為何成為  $N-3$ ？
4. 假使假設考驗的結果為拒絕虛無假設，是否接受對立假設的結論不會有犯錯的可能？

版權所有，重製必究